

地基沉降预测模型的正则化算法

唐利民^{1,2}

(1.中南大学 信息物理工程学院, 长沙 410083; 2.长沙理工大学 交通运输工程学院, 长沙 410004)

摘要:通过分析地基沉降预测模型,指出最小二乘的病态性会导致模型参数求解失败。应用正则化理论,基于矩阵求逆理论,提出了一种沉降预测模型参数的正则化无偏估计算法,说明了新算法的无偏性和方差最小性。在一定条件下,证明了新算法中正则参数的存在性,并给出了正则参数的计算公式。结合文献和工程实例进行的分析表明,新算法降低了矩阵条件数,减轻矩阵病态程度,能有效求得地基沉降预测模型参数。

关键词:地基沉降; 预测模型; 正则化; 正则参数; 病态矩阵

中图分类号: U 416

文献标识码: A

Regularization algorithm of foundation settlement prediction model

TANG Li-min^{1,2}

(1. School of Info-Physics and Geomatics Engineering, Central South University, Changsha 410083, China;

2. School of Traffic and Transportation Engineering, Changsha University of Science & Technology, Changsha 410004, China)

Abstract: Ill-conditioning of least squares will lead to parameter solving failure. Based on analysis of foundation settlement prediction model and matrix inversion theory, using regularization theory, a new regularization unbiased estimation settlement prediction model algorithm is proposed. Unbiased and minimal variance of this new algorithm is described according to statistical theory. Existence of regularization parameter in the new algorithm is proofed in some condition. Calculation formula of regularization parameter is also given. Analyses with literatures and engineering examples show that the algorithm proposed not only reduces the matrix condition number and alleviates matrix ill-conditioning degree, but also can get the prediction model parameters effectively.

Key words: foundation settlement; prediction model; regularization; regularization parameter; ill-conditioning matrix

1 引言

地基沉降预测与分析模型就是通过大量的实测结果,利用统计方法,通过沉降与沉降原因之间的相关性,建立荷载或环境量与沉降之间的数学模型,并依此进行沉降预测与分析,或者依据沉降自身随时间、空间变化特征及变化建立统计模型。前者以多元回归分析模型、逐步回归分析模型和岭回归分析模型等为主,后者有趋势分析法、时间序列分析法、灰色 GM 模型法、模糊聚类分析模型、动态响应分析等方法。陈远洪^[1]依据现场实测典型沉降-时间关系特性,基于 Taylor 展开原理提出软基路堤工后沉降预测分析的幂多项式模型;朱志铎^[2]建立软土路基全过程沉降预测的 Logistic 模型,确定了模型中各参数含义;吕秀杰^[3]提出了一种反映沉

降速率与沉降半立方非线性关系的双曲型曲线预测模型;赵明华^[4]基于线性或近似线性加载情况下路基沉降过程和 Usher 曲线,将广泛用于经济和资源预测的 Usher 模型应用于路基沉降预测;何习平^[5]研究了加权多点灰色模型在高边坡变形预测中的应用;王丽琴^[6]对黄土路基工后沉降预测模型进行了对比研究。对这些经典的沉降分析与预测模型,一般文献只是简单地直接采用模型,对模型的病态性并没有多加考虑。而多元回归分析模型、逐步回归分析模型和岭回归分析模型、趋势分析法、时间序列分析法、灰色 GM 模型法等模型中,在一定的条件下,都会存在模型方程组的病态问题^[7]。

沉降预测模型依据最小二乘原理来进行参数的求解时,最小二乘的病态性会导致模型分析失败。基于此,岭估计、有偏的正则化理论被提出并应用

于改善线性最小二乘的病态性^[8]。考虑到一般正则化理论估计的有偏性,本文提出了一种沉降预测模型参数的正则化无偏估计算法,证明了在一定条件下正则参数的存在性,给出了正则参数的计算公式,并以常用地基沉降预测模型中的时间序列模型和灰色系统模型及双曲线模型结合文献和工程实例进行了分析。

2 地基沉降预测模型的正则化算法

改善病态矩阵的病态性,一种方法是对矩阵进行正则化,它以正则化理论为基础^[9];一种方法是改善矩阵的条件数,主要是以改善矩阵对角线上元素,也即降低最大、最小特征值的比值,从而以降低矩阵的条件数为主,岭估计和主成分分析方法是此类的代表;再一种就是从构建病态矩阵的基本原理和方程出发,根据具体问题来修改矩阵的结构,进而从源头上控制矩阵的病态。

设地基沉降预测模型为 $Y = Xb$, Y 为地基沉降预测值, X 为信息矩阵, b 为所求参数。依据最小二乘原理,当 $X^T X$ 非奇异或没有病态时,其参数 $\hat{b}$ 可由下式求得

$$\hat{b} = [X^T X]^{-1} X^T Y \quad (1)$$

式(1)的岭估计式为

$$\hat{b}(k) = [X^T X + kI]^{-1} X^T Y \quad (2)$$

式中: I 为单位矩阵。在岭估计中, k 是作为岭参数出现的。从数学上恒等式的角度看,式(2)中的等号只有 $k=0$ 才成立,一般情况下等号并不成立,应改写为约等于,即 $\hat{b}(k) \approx [X^T X + kI]^{-1} X^T Y$ 。由式(2)求得的估值 $\hat{b}(k)$ 会因为岭参数 k 的变化而不稳定。

令 $\hat{b}$ 的正则解为 $\hat{b}(\alpha)$, 式(1)两边同时左乘 $X^T X$:

$$[X^T X] \hat{b}(\alpha) = [X^T X] [X^T X]^{-1} X^T Y = X^T Y \quad (3)$$

式(3)两边同时加上一项 $\alpha I \hat{b}(\alpha)$:

$$[X^T X + \alpha I] \hat{b}(\alpha) = X^T Y + \alpha I \hat{b}(\alpha) \quad (4)$$

移项,得

$$\begin{aligned} \hat{b}(\alpha) &= [X^T X + \alpha I]^{-1} [X^T Y + \alpha I \hat{b}(\alpha)] = \\ &= [X^T X + \alpha I]^{-1} X^T Y + [X^T X + \alpha I]^{-1} \alpha I \hat{b}(\alpha) \end{aligned} \quad (5)$$

移项合并后,得

$$\begin{aligned} \hat{b}(\alpha) - [X^T X + \alpha I]^{-1} \alpha I \hat{b}(\alpha) &= \\ [I - [X^T X + \alpha I]^{-1} \alpha I] \hat{b}(\alpha) &= \\ [X^T X + \alpha I]^{-1} X^T Y \end{aligned} \quad (6)$$

式(6)两边同时左乘 $[I - [X^T X + \alpha I]^{-1} \alpha I]^{-1}$, 得

$$\begin{aligned} [I - [X^T X + \alpha I]^{-1} \alpha I]^{-1} [I - [X^T X + \alpha I]^{-1} \alpha I] \hat{b}(\alpha) &= \\ [I - [X^T X + \alpha I]^{-1} \alpha I]^{-1} [X^T X + \alpha I]^{-1} X^T Y \end{aligned} \quad (7)$$

由 $[I - [X^T X + \alpha I]^{-1} \alpha I]^{-1} [I - [X^T X + \alpha I]^{-1} \alpha I] \cdot I = I$, 故有:

$$I \hat{b}(\alpha) = [I - [X^T X + \alpha I]^{-1} \alpha I]^{-1} [X^T X + \alpha I]^{-1} X^T Y \quad (8)$$

从而,得到参数 $\hat{b}(\alpha)$ 的正则化解:

$$\hat{b}(\alpha) = [I - [X^T X + \alpha I]^{-1} \alpha I]^{-1} [X^T X + \alpha I]^{-1} X^T Y \quad (9)$$

这里, α 为正则参数。式(9)所求的估值 $\hat{b}(\alpha)$ 与式(1)是相等的,区别在于由于正则参数的存在, $X^T X$ 的病态性得到了改善。

3 地基沉降预测模型正则化算法的统计性质

3.1 无偏性

式(9)两边同时左乘 $[I - [X^T X + \alpha I]^{-1} \alpha I]$:

$$[I - [X^T X + \alpha I]^{-1} \alpha I] \hat{b}(\alpha) = [X^T X + \alpha I]^{-1} X^T Y \quad (10)$$

式(10)两边同时左乘 $[X^T X + \alpha I]$:

$$[X^T X + \alpha I] [I - [X^T X + \alpha I]^{-1} \alpha I] \hat{b}(\alpha) = X^T Y \quad (11)$$

由式(11),有:

$$\begin{aligned} [[X^T X + \alpha I] I - [X^T X + \alpha I] \cdot \\ [X^T X + \alpha I]^{-1} \alpha I] \hat{b}(\alpha) &= X^T Y \end{aligned} \quad (12)$$

由 $[X^T X + \alpha I] I = [X^T X + \alpha I]$, $[X^T X + \alpha I] \cdot [X^T X + \alpha I]^{-1} = I$, 式(12)化为

$$[[X^T X + \alpha I] - \alpha I] \hat{b}(\alpha) = X^T Y \quad (13)$$

从而得到

$$[X^T X] \hat{b}(\alpha) = X^T Y \quad (14)$$

式(14)两边同时左乘 $[X^T X]^{-1}$, 得

$$\hat{b}(\alpha) = [X^T X]^{-1} X^T Y = \hat{b} \quad (15)$$

考虑式 (15), 则有:

$$E(\hat{b}(\alpha)) = E([X^T X]^{-1} X^T Y) = E(\hat{b}) \quad (16)$$

已知 $E(\hat{b}) = [X^T X]^{-1} X^T E(Y)$, $E(Y) = Xb + E(\Delta)$, 故有:

$$E(\hat{b}(\alpha)) = [X^T X]^{-1} X^T Xb = b \quad (17)$$

式 (9) 所求参数的正则解具有无偏性。

3.2 方差最小性

线性模型中未知参数 b 的最优线性无偏估计为 $\hat{b} = [X^T X]^{-1} X^T Y$ 。王新洲^[10]证明了线性模型的最小二乘参数估计 $\hat{b}$ 具有最小方差。由式 (15) 可知, $\hat{b}(\alpha)$ 也是最小二乘估计参数 $\hat{b}$ 的具有最小方差的参数估计。

4 正则参数的存在性证明

选取正则化参数分为先验的和后验的两类策略。广为采用的后验策略是偏差原理和广义偏差原理。现在已提出了在误差水平未知情况下的各种后验准则, 如 Tikhonov 的拟最优准则、Hansen 的 L 曲线准则和 Engl 的误差极小化准则等^[11]。

沉降预测模型参数的正则化算法中, 正则参数 α 的选择并不是随意的。在式 (9) 中, 虽然正则参数 α 避免了 $X^T X$ 矩阵的病态性, 但新增加了 $[I - [X^T X + \alpha I]^{-1} \alpha I]$ 这个矩阵的求逆运算。当 $[I - [X^T X + \alpha I]^{-1} \alpha I]$ 也具有病态性时, 式 (9) 所得的解也会变得不稳定。所以, 正则参数 α 不仅起着避免 $X^T X$ 矩阵病态的作用, 也起着使得 $[I - [X^T X + \alpha I]^{-1} \alpha I]$ 矩阵不具有病态的作用。选择正则参数 α 的原则是, 既能有效消除 $X^T X$ 矩阵的病态, 也能在一定程度上消除 $[I - [X^T X + \alpha I]^{-1} \alpha I]$ 矩阵的病态。条件数是用来判断矩阵是否病态的一个重要指标, 设 c 为矩阵的条件数, c 值较大时, 矩阵严重病态, 而 c 值较小时, 矩阵为良态矩阵。

定理 1: 设病态矩阵 $X^T X$ 的最大特征值为 $\lambda_{\max}$, 最小特征值为 $\lambda_{\min}$ 。当 $\sqrt{\frac{\lambda_{\max}^2 - \lambda_{\max} \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} \lambda_{\min} - \lambda_{\min}^2}} = c$ 时, 存在一个正则参数 α , 使得矩阵 $[X^T X + \alpha I]$ 和 $[I - [X^T X + \alpha I]^{-1} \alpha I]$ 的条件数均等于 c 。

证明: $X^T X$ 是方阵, 则 $\lambda_{\max} > \lambda_{\min} > 0$ 。由 $X^T X$ 的最大、最小特征值可知, 矩阵 $[X^T X + \alpha I]$ 的最大特征值为 $\lambda_{\max} + \alpha$, 最小特征值为 $\lambda_{\min} + \alpha$ 。 $[I - [X^T X + \alpha I]^{-1} \alpha I]$ 最大特征值为 $\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\max} + \alpha}$, 最小特征值

为 $\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\min} + \alpha}$, 则 $[X^T X + \alpha I]$ 的条件数为 $\frac{\lambda_{\max} + \alpha}{\lambda_{\min} + \alpha}$, $[I - [X^T X + \alpha I]^{-1} \alpha I]$ 的条件数为 $\frac{\lambda_{\max}(\lambda_{\min} + \alpha)}{\lambda_{\min}(\lambda_{\max} + \alpha)}$ 。

令 $\frac{\lambda_{\max} + \alpha}{\lambda_{\min} + \alpha} = c$, 则得 $[X^T X + \alpha I]$ 中的 α 计算公式为

$$\alpha = \frac{\lambda_{\max} - c\lambda_{\min}}{c - 1} \quad (18)$$

又令 $\frac{\lambda_{\max}(\lambda_{\min} + \alpha)}{\lambda_{\min}(\lambda_{\max} + \alpha)} = c$, 则得 $[I - [X^T X + \alpha I]^{-1} \alpha I]$ 的 α 计算公式为

$$\alpha = \frac{(c-1)\lambda_{\max}\lambda_{\min}}{\lambda_{\max} - c\lambda_{\min}} \quad (19)$$

由式 (18)、(19) 右边项相等得

$$\frac{\lambda_{\max} - c\lambda_{\min}}{c - 1} = \frac{(c-1)\lambda_{\max}\lambda_{\min}}{\lambda_{\max} - c\lambda_{\min}} \quad (20)$$

从式 (20) 中解得 c 为

$$c = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}^2 - \lambda_{\max}\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}\lambda_{\min} - \lambda_{\min}^2}} \quad (21)$$

由此, 定理 1 得以证明。

证明中, 不仅对正则参数 α 的存在性给出了证明, 也给出了求 α 的具体计算公式。当已知病态矩阵的最大特征值和最小特征值时, 可根据式 (18) 或式 (19) 计算出相应的 α 值。

5 实例验证与分析

沉降预测模型病态性是由于模型的具体构造方法和求解方式造成的。文献[1]中提出的软基路堤工后沉降幂多项式预测, 其矩阵形式为 $S = TA$, 对两边求逆并根据逆矩阵性质, 有^[1]:

$$A = (T)^* S / |T| \quad (22)$$

这里, $T^{-1} = (T)^* / |T|$, 即 $A = T^{-1}S$ 。如果矩阵 T 呈病态, 则其逆矩阵较难求解。实际上, 当取文献[1]表 1 中 A20 点的前 4 期数据, 即 $t_0 = 428$ 、 $t_1 = 443$ 、 $t_2 = 458$ 、 $t_3 = 473$, 用 3 次幂多项式进行预测时, 矩阵 T 的条件数达到 3.7×10^{12} , 为严重病态; 特征值最大的为 1.002, 最小的为 2.16×10^{-12} , 几乎近似为 0, 即 T 接近奇异。如果直接通过式 (22) 式求解, 所得结果将不可靠。

文献[7]对路基沉降分析与预测模型中的回归分析模型、时间序列模型和灰色 GM 模型中的病态问题进行了理论分析和数值模拟, 提出在路基和软基沉降预测中使用这 3 种模型时, 必须先检查信息

矩阵的病态问题。现采用本文方法对文献[7]中的时间序列模型和灰色 GM 模型进行分析。

某路基沉降观测累计变形沉降量,共 8 期数据为: 6.01、7.02、7.98、9.01、10.00、10.99、12.01、13.02 mm,采用 AR(4)模型并基于最小二乘原理对其进行分析时,文献[7]算得 $X^T X$ 矩阵的条件数为 1 909 061.325。 $X^T X$ 的最大特征值为 1 335.950,最小特征值为 0.000 699 8,按本文式(21)计算得 $c = 1\ 381.688$,由式(18)或式(19)计算得 $\alpha = 0.966\ 897$,代入式(9),矩阵 $[X^T X + \alpha I]$ 和 $[I - [X^T X + \alpha I]^{-1} \alpha I]$ 的条件数均为 1 381.688。

采用 GM(2,1)模型对其表 2^[7]中的数据进行分析时,文献[7]得到 $X^T X$ 矩阵的条件数为 688 123.870。用本文方法,得 $c = 829.532$, $\alpha = 1.434\ 811$ 。矩阵 $[X^T X + \alpha I]$ 和 $[I - [X^T X + \alpha I]^{-1} \alpha I]$ 的条件数均为 829.532。

邵阳—怀化高速公路是国家重点建设的“五纵七横”国道主干线上海—瑞丽高速公路中的一段,主线全长约 155.84 km,是典型的山岭重丘区高速公路。沿线分布有岩溶、采空区和软土地基等,其中高路堤 ($H > 20\text{ m}$) 有 40 多段、软基 ($H > 3\text{ m}$) 有 10 多段。为优质、高效地建好邵怀高速公路,在施工期对全线路基实施沉降与变形观测,及时为指导设计与施工提供可靠的数据。其 K28+820 右断面实测总体沉降板的后 9 期沉降观测结果为: 2.7、23.6、32.3、34.5、44.8、45.2、53.6、54.1、55.5 mm。邓聚龙先生在文献[12]中建议用 GM(n ,1)模型作为预测模型。本文采用 GM(2,1)模型对后 9 期数据进行分析,此时 $X^T X$ 矩阵的条件数为 2 125 934.473。计算出 $c = 1\ 458.058$,据式(19)得 $\alpha = 189.152\ 874$ 。利用式(9)求出 $\hat{b}(\alpha) = [0.239\ 470, 0.018\ 208, 19.618\ 685]$,矩阵 $[X^T X + \alpha I]$ 和 $[I - [X^T X + \alpha I]^{-1} \alpha I]$ 的条件数均为 1 458.058。当采用岭估计式求解时,由于 α 取值不同,矩阵 $[X^T X + \alpha I]$ 的条件数也不同,其所求参数 $\hat{b}(\alpha)$ 变化非常大,且为有偏估计,其方差也不是最小。

双曲线模型被广泛用于地基沉降预测与分析,其公式为 $y = t/(at + b)$ 。一般通过变量替换将它转为线性函数。引入新变量 $y' = 1/y$ 和 $x' = 1/t$,其公式变为 $y' = a + bx'$ 。采用双曲线模型对 K28+820 后 9 期数据进行分析,此时 $X^T X$ 矩阵的条件数为 9 293.411。计算 $c = 96.402\ 3$, $\alpha = 0.093\ 4$ 。矩阵 $[X^T X + \alpha I]$ 和 $[I - [X^T X + \alpha I]^{-1} \alpha I]$ 的条件数均为

96.402 3。以上算例表明,本文算法大幅度降低了矩阵的条件数。

6 讨论与结论

对于地基沉降预测模型中多项式、幂多项式、时间序列、灰色系统等常用模型,矩阵的病态是导致模型参数求解失败的一个重要原因。

从定理 1 中可知,式(9)的应用是有条件的。如果 c 值很大,则根据式(18)和式(19)计算所得的正则参数 α 就不能降低矩阵 $[X^T X + \alpha I]$ 和 $[I - [X^T X + \alpha I]^{-1} \alpha I]$ 的条件数到理想数值,此时用式(9)来求解沉降模型中的参数,是不稳定的。因此, $X^T X$ 的特征值必须使得 c 小于某个数值(这个数值为良态矩阵的条件数)。实际计算时,可根据 $X^T X$ 的特征值计算出 c 值,当 c 值过大时改用有偏估计式(2);当 c 值较小时,就可利用无偏估计式(9)来计算地基沉降预测模型中的参数值。

本文提出的无偏正则化地基沉降预测模型,能大幅度降低矩阵的条件数。既减轻矩阵的病态程度,又使所求参数具有良好的统计性质。新算法适用于基于线性最小二乘原理的地基沉降预测模型。如果把地基沉降常用的预测模型如常规固结模型、星野模型、双曲线模型、指数模型等化为线性模型后依照最小二乘原理求解参数,式(9)也同样适用。

参考文献

- [1] 陈远洪, 陈占, 周革. 软基路堤工后沉降的幂多项式预测与分析[J]. 土木工程学报, 2009, 42(5): 112—116.
CHEN Yuan-hong, CHEN Zhan, ZHOU Ge. Power-polynomial prediction and analysis of post construction settlement of embankment on soft ground[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2009, 42(5): 112—116.
- [2] 朱志铎, 周礼红. 软土路基全过程沉降预测的 Logistic 模型应用研究[J]. 岩土工程学报, 2009, 31(6): 965—969.
ZHU Zhi-duo, ZHOU Li-hong. Application of Logistic model in settlement prediction during complete process of embankment construction[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2009, 31(6): 965—969.
- [3] 吕秀杰. 软土地基工后沉降预测模型的研究[J]. 岩土力学, 2009, 30(7): 2091—2195.
LÜ Xiu-jie. Research on estimation model of post construction settlement for soft ground[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2009, 30(7): 2091—2195.

- [4] 赵明华, 龙照, 邹新军. 路基沉降预测的 Usher 模型应用研究[J]. 岩土力学, 2008, 29(11): 2973—2981.
ZHAO Ming-hua, LONG Zhao, ZOU Xin-jun. Prediction of roadbed settlement by Usher model[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2008, 29(11): 2973—2981.
- [5] 何习平, 华锡生, 何秀凤. 加权多点灰色模型在高边坡变形预测中的应用[J]. 岩土力学, 2007, 28(6): 1187—1191.
HE Xi-ping, HUA Xi-sheng, HE Xiu-feng. Weighted multi-point grey model and its application to high rock slope deformation forecast[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2007, 28(6): 1187—1191.
- [6] 王丽琴, 靳宝成. 黄土路基工后沉降预测模型对比研究[J]. 铁道学报, 2008, 30(1): 43—47.
WANG Li-qin, JIN Bao-cheng. Contrast study on prediction models of settlement of loess-fill subgrade after construction[J]. **Journal of the China Railway Society**, 2008, 30(1): 43—47.
- [7] 唐利民, 唐平英. 公路路基沉降分析与预测模型病态问题研究[J]. 中外公路, 2008, 28(2): 75—79.
TANG Li-min, TANG Ping-ying. Study of ill-posed problems in road subgrade settlement analysis and predictions models[J]. **Journal of China & Foreign Highway**, 2008, 28(2): 75—79.
- [8] 李亭, 唐利民, 石水玉. 时间序列 AR 模型的正则化及其应用[J]. 交通科学与工程, 2009, 25(4): 24—28.
LI Ting, TANG Li-min, SHI Shui-yu. Regularized time series AR model and its application[J]. **Journal of Transport Science and Engineering**, 2009, 25(4): 24—28.
- [9] 吉洪诺夫 A H, 阿尔先宁 B Я [苏]. 不适定问题的解法[M]. 王秉忱译. 北京: 地质出版社, 1979: 142—174.
- [10] 王新洲. 非线性模型参数估计理论与应用[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2002: 1—132.
- [11] 肖庭延, 于慎根, 王彦飞. 反问题的数值解法[M]. 北京: 科学出版社, 2003: 58—63.
- [12] 邓聚龙. 灰色控制系统 (第一版) [M]. 武汉: 华中工学院出版社, 1985: 293—360.